

Cálculo del
geoide gravimétrico mexicano

Técnica
Stokes-Helmert



Instituto Nacional de Estadística y Geografía

Cálculo del geoide gravimétrico mexicano

**Técnica
Stokes-Helmert**

Obras complementarias publicadas por el INEGI sobre el tema:

El Geoide Gravimétrico Mexicano, 2010; Taller del Geoide para México, Centroamérica y el Caribe; Aspectos Metodológicos de las Cartas y Modelos Gravimétricos, 2010.

Catalogación en la fuente INEGI:

526.701 Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México).
Cálculo del geoide gravimétrico mexicano : técnica Stokes-Helmert / Instituto Nacional de Estadística y Geografía.-- México : INEGI, c2019.

viii, 17 p. : il.

1. Geodesia - México. 2. Gravedad - Medición - Tierra - Metodología.

Conociendo México

01 800 111 4634

www.inegi.org.mx

atencion.usuarios@inegi.org.mx



INEGI Informa



@INEGI_INFORMA

DR © 2019, **Instituto Nacional de Estadística y Geografía**

Edificio Sede

Avenida Héroe de Nacozari Sur 2301

Fraccionamiento Jardines del Parque, 20276 Aguascalientes,

Aguascalientes, Aguascalientes, entre la calle INEGI,

Avenida del Lago y Avenida Paseo de las Garzas.

Presentación

El propósito principal de este documento es ayudar al lector especialista en manejo de información geodésica o geofísica a interpretar puntualmente las definiciones y conceptos adoptados sobre el campo de gravedad en el cálculo de alturas geoidales. La redacción está basada en una traducción del capítulo 1 del *Reference Manual for the Stokes-Helmert's Geoid Software*, escrito por Robert Tenzer y Juraj Janak en Fredericton, Canadá, 2001. Se recomienda consultar en forma adicional los libros y artículos referidos a lo largo de este documento para profundizar en el conocimiento específico de los modelos físicos adoptados.

El Geoide Gravimétrico Mexicano es un producto del programa de trabajo del **Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI)**, dirigido a dar soporte a usuarios del marco de referencia geodésico oficial en México (INEGI, 2010; INEGI, 2010b). La técnica llamada Stokes-Helmert es un esquema completo de cálculo, propiedad intelectual de la Universidad de New Brunswick, Canadá, para obtener estimaciones de altura geoidal con exactitud máxima de 1 cm. Su aplicación en casos reales ha mostrado que la exactitud final de los resultados depende en gran medida de las cualidades de los insumos. En México esta técnica se ha implementado a partir de la Base de Datos Geodésica del **INEGI** para generar los modelos geoidales GGM04, GGM05, GGM06 y GGM10. La evaluación de calidad se encuentra declarada en la documentación de cada versión liberada del Geoide Gravimétrico Mexicano (e.g. INEGI, 2015).

Índice

Introducción	VII
1. Definiciones fundamentales	1
2. Formulación del problema del valor de frontera	3
3. Evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre	7
3.1 Efecto directo sobre la gravedad	7
3.2 Corrección para la altura ortométrica	8
3.3 Modelado de las anomalías de gravedad	8
4. Continuación descendiente	11
5. Determinación de la altura geoidal	13
5.1 Integración de Stokes	13
5.2 Efecto indirecto primario	13
Bibliografía	15

Introducción

Existe una relación íntima entre la determinación de alturas y el campo de gravedad. Una forma de hacer evidente esta relación es la consideración de que la superficie de referencia vertical, definida como superficie de altura cero o geoide, está definida por un nivel continuo y único sobre una cobertura específica. Dado que las superficies de nivel se determinan con base en vector de gravedad, la determinación de alturas comienza siendo parametrizada por condiciones físicas.

Para conocer la localización del geoide y determinar su forma es necesario conocer el comportamiento del campo de gravedad al interior de la tierra; sin embargo, ante la imposibilidad de observar directamente los valores de gravedad bajo tierra, se opta por aplicar una técnica de modelado que permita hacer estimaciones de alguna calidad aceptable. La técnica Stokes-Helmert es actualmente una de las más completas para crear este modelado partiendo de observaciones de gravedad hechas sobre la superficie del terreno y posteriormente estimar con gran exactitud la altura geoidal a partir de esa información.

Entre los insumos necesarios para la aplicación de esta técnica se cuentan:

- 1) Datos gravimétricos superficiales exactos, homogéneos y de cobertura extendida más allá de la zona de interés. Esto incluye áreas continentales y marítimas.
- 2) Modelos digitales de la elevación del terreno exactos (sin error alguno) con distintas resoluciones y coberturas, incluyendo un modelo de cobertura mundial.
- 3) Un modelo de cobertura mundial sobre el campo de gravedad en baja resolución, generalmente relacionado con insumos satelitales.
- 4) Un modelo digital de densidad del terreno aproximada, derivado de estudios geológicos superficiales.

Para el caso concreto de un territorio definido como “zona de interés” la información disponible puede solo acercarse al requerimiento hasta cierto grado de exactitud y sobre cierta cobertura, lo que impone límites significativos en la calidad del insumo. Cada realización de un modelado geoidal, como el Geoide Gravimétrico Mexicano, incluye entre la documentación descriptiva (reportes técnicos y metadatos) una declaración de los conjuntos de

datos utilizados como insumo. Esta limitante de calidad incide sobre la exactitud alcanzable en las alturas geoidales estimadas.

A grandes rasgos, la técnica de procesamiento se forma de las siguientes etapas: partiendo de datos gravimétricos superficiales, se crea primeramente un modelo digital de anomalía de aire libre, al cual se aplica una serie de correcciones y efectos diseñados para transformar el campo de gravedad observado bajo condiciones reales en un campo sometido a las leyes de lo que se conoce como espacio de Helmert. Dicho espacio es propicio para llevar a cabo un cálculo de continuación descendente, que consiste en crear un modelo digital de anomalías de gravedad al nivel de altura cero. Es decir, un proceso de cálculo del comportamiento del campo de gravedad en dirección hacia abajo hasta el nivel aproximado donde se localiza el geoide. El modelo resultante es tomado luego como “condición de frontera” en el problema geodésico de valor de frontera. De este modo, aún bajo las condiciones del espacio de Helmert se aplica la integral de Stokes, que representa la solución del problema geodésico al transformar las anomalías de gravedad en valores de altura geoidal. Finalmente, los valores de altura geoidal de Helmert son adaptados al espacio real mediante la aplicación de un efecto llamado topográfico indirecto primario. Otras fuentes recomendadas para encontrar descripciones de la técnica Stokes-Helmert son las escritas por Tenzer y Janak, 2002, y Ellmann y Vaníček, 2007.

Es conveniente notar que dentro del proceso de cálculo de la integral de Stokes se aplica una adaptación adicional que incorpora el aprovechamiento de un modelo gravimétrico proveniente de información satelital. Esta parte es referida como modificación al kernel de Stokes. La documentación recomendada para revisar este tema es Vaníček y Klusberg, 1987.

1. Definiciones fundamentales

La gravedad (g) es la magnitud de aceleración producida por el campo gravitacional de la Tierra junto con el efecto de aceleración centrífuga (causado por el movimiento de rotación). Se denomina como g_P a la magnitud de aceleración de gravedad en un punto P , que está localizado por coordenadas cartesianas (x_P, y_P, z_P) , de modo que el vector tridimensional de gravedad $\vec{g}_P$ puede definirse así (Torge, 2001):

$$\vec{g}_P = -g_P \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

De esta forma g_P es una cantidad de aceleración positiva, medida en unidades de m/s^2 y $\vec{g}_P$ es el vector que apunta en dirección de la vertical local, conocida como plomada. Los ángulos Φ y Λ definen la dirección de $\vec{g}_P$ en términos de latitud astronómica y longitud astronómica respectivamente. Los ángulos pueden aproximarse con un modelo geoidal o medirse utilizando una cámara geodésica cenital (no medible con GNSS).

Se le llama deflexión de la vertical a la diferencia entre (Φ, Λ) y las componentes de latitud y longitud geodésicas (φ, λ) .

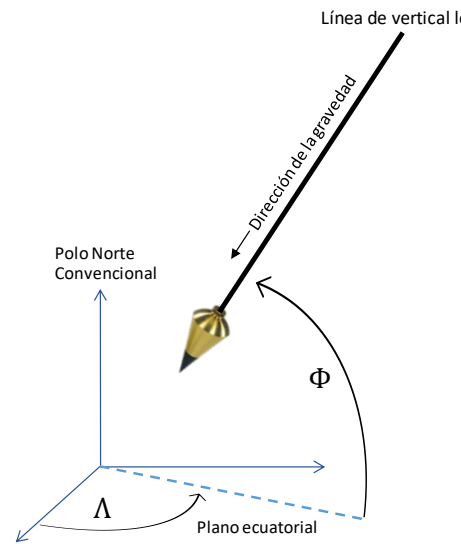


Figura 1. Esquema del vector de gravedad parametrizado por coordenadas astronómicas.

El potencial de gravedad de la Tierra sobre un punto (W_P) es el número que corresponde a la suma de valores de gravedad que se encuentran sobre la línea de plomada, contados desde el centro de masas de la Tierra hasta ese punto de interés. Las unidades de potencial son m^2/s^2 y su expresión matemática es la siguiente:

$$W_P = \int_{l=0}^P g \, dl \quad (1.2)$$

donde l representa una distancia medida desde el geocentro hasta el punto de interés recorriendo la trayectoria de plomada. Complementariamente, el vector de gravedad en un punto representa la dirección de crecimiento máximo del potencial y g es la magnitud del crecimiento de W por cada metro.

$$\vec{g}_P = \text{grad } W_P \quad (1.3)$$

Los puntos del espacio donde se encuentra un valor de potencial constante forman precisamente una superficie de nivel. En la práctica común, aquella superficie de nivel a la que se dictamina como dátum vertical es distinguida con un valor de potencial W_0 . Esta notación es útil para referir la altura de un punto en términos de potencial respecto del dátum, usando el número

$$C_P = W_0 - W_P \quad (1.4)$$

que es denominado número geopotencial del punto P .

Para efectos de medir altura en unidades de metros es posible transformar las unidades de potencial de C_P a valores de altura ortométrica (H^0) mediante la siguiente expresión:

$$H^0 = \frac{C}{\bar{g}} \quad (1.5)$$

donde $\bar{g}$ es el valor de gravedad real media desde el punto de interés hasta la superficie W_0 .

2. Formulación del problema del valor de frontera

La cantidad por resolver es el potencial de la gravedad terrestre sobre y fuera del geoide, representado por W , y el propio geoide. El geoide es la superficie equipotencial que más se aproxima al nivel medio del mar y está representado por $W = W_0 = \text{constante}$. Para resolver este problema, se introduce un campo de referencia, llamado campo de gravedad normal, generado por el elipsoide de referencia. Se define que el potencial normal U en este elipsoide de referencia sea igual al potencial real en el geoide:

$$U_0 = W_0 \quad (2.1)$$

La diferencia entre el potencial de gravedad real y el potencial normal en un punto arbitrario del espacio tridimensional euclidiano se conoce como potencial perturbador.

$$T = W - U \quad (2.2)$$

Cuando se desprecia la atracción atmosférica, T es armónico fuera de la Tierra y satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.3)$$

Una vez resuelto T , se puede obtener el potencial de gravedad W en cualquier punto añadiendo U , que se puede calcular a partir de modelos existentes. También, cuando se conoce T en el geoide, la separación entre el elipsoide de referencia y el geoide se puede obtener a partir de la fórmula de Bruns,

$$N = \frac{T_g}{\gamma_0} \quad (2.4)$$

donde T_g es el potencial perturbador sobre el geoide y γ_0 representa el valor de la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia. El problema se reduce entonces a la determinación de T sobre y fuera del geoide.

Sin embargo, T no satisface la ecuación de Laplace dentro de las masas topográficas donde el geoide se localiza frecuentemente. Por lo tanto, para establecer la condición de armonicidad del potencial perturbador, se tienen que eliminar o reubicar los efectos que provocan las masas atmosféricas y topográficas localizadas fuera del geoide. Esto se realiza con el método de la segunda condensación de Helmert, donde el efecto de las masas es concentrado en una capa situada sobre el geoide, de modo que la masa total de la Tierra queda invariable. Sin embargo, la Tierra y la distribución de su campo gravitacional cambian ligeramente. El espacio obtenido después de esa condensación se conoce como espacio de Helmert. Las cantidades dadas en el espacio de Helmert se denotan con el superíndice h . El potencial de Helmert se define como sigue:

$$W^h = W - \delta V^t - \delta V^a \quad (2.5)$$

donde δV^t es el potencial topográfico residual, que es la diferencia entre el potencial de las masas topográficas y el potencial de la capa de condensación.

$$\delta V^t = V^t - V^{ct} \quad (2.6)$$

De manera análoga, δV^a se define como el potencial atmosférico residual.

$$\delta V^a = V^a - V^{ca} \quad (2.7)$$

Restando el campo de referencia normal U de la ecuación (2.5), el potencial perturbador en el espacio de Helmert viene a ser:

$$T^h = W^h - U \quad (2.8)$$

Como se esperaba, el potencial perturbador de Helmert es armónico en cada punto fuera del geoide, de manera que la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T^h = 0 \quad (2.9)$$

se cumple en cualquier parte fuera del geoide. Para determinar el T^h , se tiene que resolver el problema del valor de frontera de tercer tipo fuera del geoide. Por lo tanto, se necesita contar con el valor de frontera en el geoide, desconocido a priori. En este problema, las anomalías de gravedad de Helmert sobre el geoide sirven como valores de frontera. Para encontrar una relación entre el potencial perturbador y las anomalías de gravedad de Helmert, se introduce la derivada radial del potencial perturbador

$$\frac{\partial T^h}{\partial r} = \frac{\partial W^h}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (2.10)$$

usando una aproximación esférica, se tiene que

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} \cong g^h - \gamma = \delta g^h \quad (2.11)$$

donde δg^h es la perturbación de la gravedad de Helmert. En Vaníček, *et. al.*, (1999), se sugiere aplicar una corrección elipsoidal a esta aproximación, porque de lo contrario el error en el geoide puede alcanzar más de un centímetro. Entonces, la ecuación (2.11) viene a ser:

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} = \delta g^h - \varepsilon_{dg^h} \quad (2.12)$$

La perturbación de la gravedad no suele considerarse una cantidad medible en la superficie terrestre. Por lo tanto, se tiene que transformar la perturbación de la gravedad de Helmert a una cantidad más disponible, que es la anomalía de gravedad de Helmert. Esta transformación se obtiene usualmente al añadir un término Γ a la perturbación de la gravedad. Este término explica el cambio en la gravedad normal debido a la diferencia entre la altura geodésica h y la altura ortométrica disponible comúnmente, H^0 . Esta expresión se puede escribir con suficiente exactitud como:

$$\Gamma = \frac{T^h}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \quad (2.13)$$

Para resolver el problema del valor de frontera, es conveniente introducir la aproximación esférica de (1.12):

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cong -\frac{2}{R} \quad (2.14)$$

El error ocasionado por esta aproximación se conoce como corrección elipsoidal para la aproximación esférica, ε_n .

Asumiendo la ecuación (2.14), la ecuación (2.13) se puede volver a escribir como

$$-\frac{2}{R} T^h = \Gamma + \varepsilon_n \quad (2.15)$$

Luego, las ecuaciones (2.12) y (2.15) se pueden combinar para obtener

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} - \frac{2}{R} T^h = \Delta g^h + \varepsilon_n - \varepsilon_{dg^h} \quad (2.16)$$

Esta expresión representa la ecuación fundamental de la geodesia física, válida en el espacio de Helmert. Relaciona los valores de frontera conocidos Δg^h al potencial perturbador desconocido fuera y sobre el geoide. Como los valores de frontera son las anomalías de gravedad de Helmert sobre el geoide, en las dos secciones siguientes se verá la derivación de esta cantidad a partir de las mediciones.

3. Evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre

De acuerdo con Vaníček, *et. al.*, (1999), la anomalía de gravedad de Helmert Δg^h se define como:

$$\Delta g^h = g^h - \gamma_{r=r_t-\xi^h} \quad (3.1)$$

donde γ_r es la gravedad normal sobre el teluroide en el espacio de Helmert (figura 2).

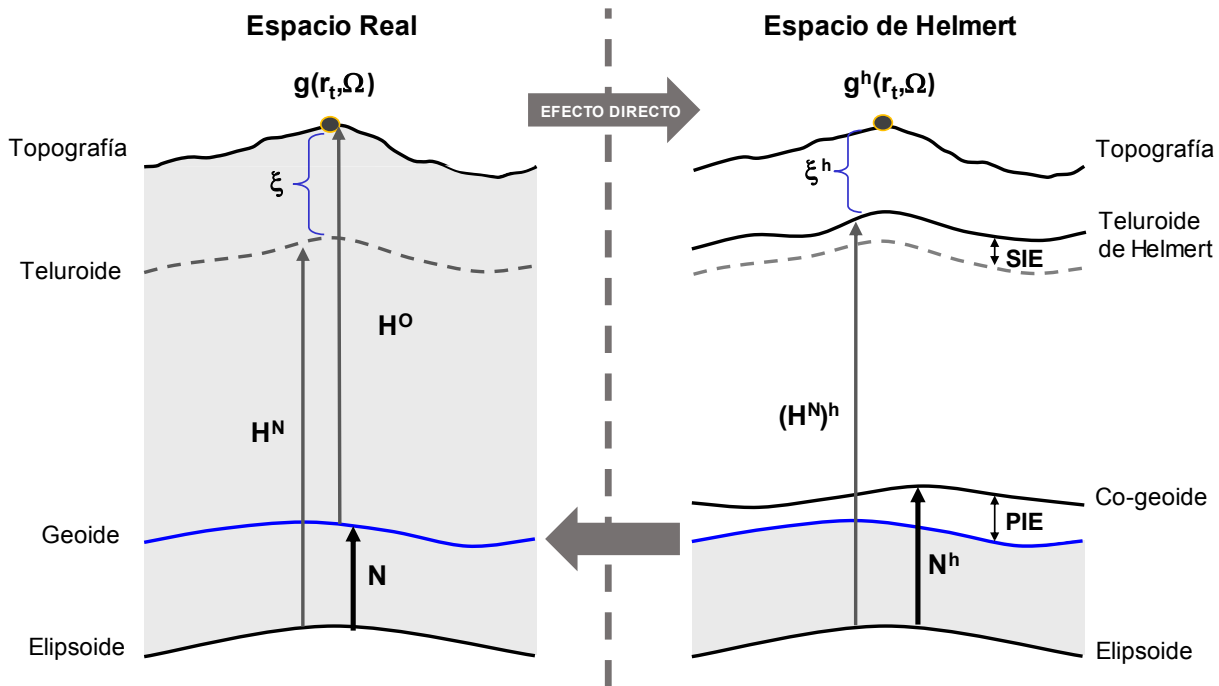


Figura 2. Las cantidades involucradas en el espacio real y de Helmert.

3.1 Efecto directo sobre la gravedad

La gravedad de Helmert (g^h) sobre la superficie terrestre se obtiene a partir de la gravedad g observada sobre la superficie terrestre, añadiendo el efecto topográfico directo:

$$g^h = g + \delta A^t + \delta A^a \quad (3.2)$$

El efecto topográfico directo sobre la gravedad (DTE: *Direct Topographical Effect*, δA^t), es la atracción gravitacional de las masas topográficas menos la atracción de las masas topográficas condensadas. Deberá evaluarse sobre la superficie terrestre. De manera análoga, el efecto atmosférico directo sobre la

gravedad (DAE: *Direct Atmospheric Effect*, δA^a) es la atracción gravitacional de la atmósfera menos la atracción gravitacional de la atmósfera condensada. El efecto directo se obtiene tomando la derivada radial de los potenciales residuales topográfico y atmosférico (ecuaciones 2.6 y 2.7).

$$\delta A^t = \frac{\partial \delta V^t}{\partial r} = \frac{\partial V^t}{\partial r} - \frac{\partial V^c}{\partial r} = A^t - A^{ct} \quad (3.3a)$$

$$\delta A^a = \frac{\partial \delta V^a}{\partial r} = \frac{\partial V^a}{\partial r} - \frac{\partial V^{ca}}{\partial r} = A^a - A^{ca} \quad (3.3b)$$

3.2 Corrección para la altura ortométrica

La gravedad normal sobre el teluroide en el espacio de Helmert, $\gamma_{r=r_t-\xi^h} = \gamma_{r=r_0+(H^N)^h}$, se obtiene con la continuación ascendente de la gravedad normal en el punto correspondiente sobre el elipsoide de referencia. La altura utilizada para este cálculo deberá ser la altura normal en el espacio de Helmert $(H^N)^h$, que es la altura del teluroide de Helmert sobre el elipsoide de referencia. Sin embargo, en la práctica, las alturas de las observaciones de la gravedad sobre la superficie terrestre son alturas ortométricas H^0 y la continuación ascendente de la gravedad normal se calcula usando H^0 en lugar de $(H^N)^h$. Por lo tanto, se debe agregar una corrección a la gravedad normal. Esta corrección consiste en dos partes. La primera, que se ocasiona por la posición diferente del teluroide en el espacio real y el de Helmert, se conoce como efecto secundario indirecto. La segunda parte, que se debe a la diferencia entre la altura normal y la ortométrica, se conoce como la corrección para la altura ortométrica. Entonces, la expresión para la gravedad normal sobre el teluroide de Helmert está dada por

$$\gamma_{r=r_0+(H^N)^h} = \gamma_{r=r_0+H^0} - \frac{2}{R} H^0 \Delta g^{BS} - \frac{2}{R} \delta V^t - \frac{2}{R} \delta V^a \quad (3.4)$$

El segundo término a la derecha es la corrección para la diferencia entre el cuasigeoide y el geoide (es decir, la diferencia entre la altura ortométrica y la normal). Los otros dos términos a la derecha son el efecto topográfico indirecto secundario sobre la gravedad (SITE: *Secondary Indirect Topographical Effect*), representado por $\delta \gamma^t$, y el efecto atmosférico indirecto secundario sobre la gravedad (SIAE: *Secondary Indirect Atmospheric Effect*), representado por $\delta \gamma^a$. Al insertar las ecuaciones (3.2) y (3.4) en la (3.1) y con la anomalía de gravedad de aire libre definida como

$$\Delta g^{AL}(r_t, \Omega) = g(r_t, \Omega) - \gamma(r_0 + H^0, \Omega) \quad (3.5)$$

la expresión para la evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre es:

$$\Delta g^h = \Delta g^{AL} + \frac{2}{R} H^0 \Delta g^{BS} + \delta \gamma^t + \delta \gamma^a + \delta A^t + \delta A^a \quad (3.6)$$

3.3 Modelado de las anomalías de gravedad

El campo de anomalías de gravedad de aire libre no es muy suave, lo que lo hace poco apropiado para la interpolación y el promediado entre puntos de medición distantes. Por consiguiente, en la práctica se utiliza el campo de anomalías de gravedad de Bouguer completa, que son más suaves, para producir los datos de gravedad medios. La anomalía de Bouguer completa se define como

$$\Delta g^{BC} = \Delta g^{BS} + \delta g^{tc} = \Delta g^{AL} - 2\pi\rho_0 G H^0 + \delta g^{ct} \quad (3.7)$$

donde Δg^{BS} es la anomalía de Bouguer simple y δg^{tc} es la corrección gravimétrica del terreno, es decir, una corrección para la atracción de la topografía terrestre con relación a la altura en el punto de evaluación.

Con las ecuaciones (3.6) y (3.7), las anomalías de Bouguer completa se pueden transformar a anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre.

Entonces, la expresión para las anomalías de Helmert está dada como

$$\Delta g^h = \Delta g^{BC} + 2\pi\rho_0 GH^0 - \delta g^{tc} + \frac{2}{R} H^0 \Delta g^{BS} + \delta\gamma^t + \delta\gamma^a + \delta A^t + \delta A^a \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) contiene la corrección gravimétrica del terreno y el efecto topográfico directo. Sin embargo, la corrección del terreno está dentro del DTE, que es (según la ecuación 3.3a) la diferencia entre la atracción de las masas topográficas A^t y la atracción de las masas topográficas condensadas sobre el geoide A^c . El efecto topográfico directo DTE se puede expresar como una función de la corrección por terreno δg^{ct} y la corrección condensada del terreno δA^{cr} :

$$\delta A^t = \delta g^{ct} + \delta A^{cr} \quad (3.9)$$

Insertando la ecuación (3.9) en (3.8) se obtiene la expresión final para la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre:

$$\Delta g^h = \Delta g^{BC} + 2\pi\rho_0 GH^0 + \frac{2}{R} H^0 \Delta g^{BS} + \delta\gamma^t + \delta\gamma^a + \delta A^{cr} + \delta A^a \quad (3.10)$$

4. Continuación descendente

Una vez que se evalúa la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre se tiene que continuar a la frontera, en este caso el geoide. Este proceso se conoce como la continuación descendente de la anomalía de gravedad de Helmert.

El potencial perturbador de Helmert es una función armónica sobre el geoide del espacio de Helmert (llamado co-geoide). La solución de Poisson al problema de Dirichlet de la continuación ascendente de una función armónica puede, por lo tanto, aplicarse a encontrar una solución al problema inverso, es decir, la continuación descendente.

La relación entre la anomalía de gravedad de Helmert sobre el geoide y la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre está dada como sigue:

$$\Delta g_t^h = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Omega'} \Delta g_g^h K(r, \psi, R) d\Omega' \quad (4.1)$$

donde K es el kernel de Poisson. La solución al problema de la continuación descendente está dada como una solución de la ecuación integral de primer orden: se conoce Δg_t^h y se tiene que determinar Δg_g^h . Esta ecuación integral se puede resolver de forma iterativa; la derivación se encuentra en Vaniček, *et. al.*, (1996).

La continuación descendente de Poisson se conoce como un problema no lineal e inestable. Debido a la condición de inestabilidad, los errores en Δg_t^h pueden aparecer amplificados en la solución. Sin embargo, cuando se usan los valores medios en lugar de los valores de puntos, se puede evadir este problema.

5. Determinación de la altura geoidal

5.1 Integración de Stokes

Cuando se determinan los valores de frontera, es decir, las anomalías de gravedad en el co-geoide, se puede resolver el problema de Laplace (2.9). La solución de T_g^h está dada por la fórmula de Stokes, donde la separación entre la altura geoidal y el elipsoide de referencia se puede derivar según la fórmula de Bruns (2.4). La fórmula de Stokes (en el espacio de Helmert) se da como:

$$N^h = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Omega'} \Delta g^h S(\psi) d\Omega' \quad (5.1)$$

donde N^h corresponde a las alturas co-geoidales y S es el kernel de Stokes.

5.2 Efecto indirecto primario (PIE)

Ya que se obtiene el co-geoide de Helmert, las alturas geoidales se tienen que expresar en el espacio real. Esta transformación se lleva a cabo calculando el efecto indirecto primario (PIE: *Primary Indirect Effect*) sobre el potencial, que se puede convertir fácilmente al efecto sobre el geoide. Para obtener el potencial perturbador en el espacio real, este efecto se tiene que añadir al potencial de perturbación de Helmert, es decir:

$$T_g = T_g^h + \delta P_g \quad (5.2)$$

donde δP_g es el efecto indirecto primario sobre el potencial.

Cuando δP_g se divide entre su gravedad normal γ , se obtiene directamente el efecto sobre el geoide $N_{\delta P}$ y consecuentemente se puede añadir al co-geoide para obtener el geoide en el espacio real según la ecuación.

$$N = N^h + N_{\delta P} \quad (5.3)$$

En la práctica el PIE puede calcularse como la suma de la contribución por efecto de la masa topográfica (PITE) más la contribución por masa atmosférica (PIAE). Como se demuestra en Nývák (2000), el cálculo de PITE puede considerarse suficiente para estimar el PIE, dado que se puede despreciar la contribución por PIAE para obtener un error de altura geoidal máximo de 1 cm. La ecuación (5.3) es la ecuación final en el proceso de la determinación del geoide preciso.

Bibliografía

Ellmann, A., y P. Vaníček, 2007: "UNB application of Stokes-Helmert's approach to geoid computation". *Journal of Geodynamics* 43. doi 10.1016/j.jog.2006.09.019.

INEGI, 2010. *Norma Técnica para el Sistema Geodésico Nacional*: Diario Oficial de la Federación el 23 de diciembre de 2010. Publicación del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Aguascalientes, México.

INEGI, 2010b. *Norma Técnica de Estándares de Exactitud Posicional*: Diario Oficial de la Federación el 23 de diciembre de 2010. Publicación del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Aguascalientes, México.

INEGI, 2015. *El Geoide Gravimétrico Mexicano 2010*: Reporte del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Aguascalientes, México. ISBN 978-607-739-636-9.

Heiskanen, W.A., Moritz H., 1967: *Physical Geodesy*, Freeman, San Francisco. Kellogg O.D., 1929: *Foundations of potential theory*, Springer, Berlin (reimpreso en Dover, Nueva York en 1953).

Huang J., Vaníček P., Pagiatakis S., Brink W., 2001: Effect of topographical mass density variation on gravity and the geoid in the Canadian Rocky Mountains. *Journal of Geodesy* 74 (11-12), págs. 805 a 815.

Huang J., Vaníček P., Novák P., 2000: An alternative algorithm to FFT for the numerical evaluation of Stokes's integral. *Studia Geophysica et Geodaetica* 44, págs. 374 a 380.

Huang J., Vaníček P., Pagiatakis S., 2001: *Computational Methods for the Discrete Downward Continuation of the Earth Gravity*, IAG General Assembly, Budapest.

Janák J., Vaníček P., Alberts B., 2001: *Point and mean values of topographical effect, the Digital Earth Conference*, Fredericton, junio 25 a 28.

Martinec Z., 1993: Effect of lateral density variations of topographical masses in improving geoid model accuracy over Canada. *Contact report for Geodetic Survey of Canada*, Ottawa.

Martinec Z., Matyska C., Grafarend E.W., Vaníček P., 1993: On Helmert's 2nd condensation method, *Manuscripta Geodaetica* 18, págs. 417 a 421.

Martinec Z., Vaníček P., 1994: The indirect effect of topography in the Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid. *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 213 a 219.

Martinec Z., Vaníček P., 1994: Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical geoid. *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 257 a 268.

Martinec Z., Vaníček P., 1996: Formulation of the boundary-value problem for geoid determination with a higher-degree reference field, *Geophys. J. Int.* 126, págs. 219 a 228.

- Martínez Z., Vaníček P., Mainville A., Veronneau M., 1995: The effect of lake water on geoidal heights, *Manuscripta Geodaetica* 20, págs. 193 a 203.
- Martínez Z., 1996: Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains, *Journal of Geodesy*, 70/11, págs. 805 a 828.
- Martínez Z., Vaníček P., Mainville A., Veronneau M., 1996: Evaluation of topographical effects in precise geoid determination from densely sampled heights, *Journal of Geodesy*, 70 /11, págs. 746 a 754.
- Martínez Z., 1998: *Geodetic Boundary Value problem*, Springer.
- Molodenskij M.S., Eremeev V.F., Yurkina M.I., 1960: *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*, traducido del ruso por el Programa Israel para traducciones científicas para la Oficina de Servicios Técnicos, Departamento de Comercio de los Estados Unidos, Washington, D.C., Estados Unidos de América, 1962.
- Moritz H., 1980: *Advanced Physical Geodesy. Libro de texto*. H. Wichmann, Karlsruhe.
- Novák P., 2000: Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution to the geodetic boundary-value problem. *Technical report núm. 207*, GGE UNB, Fredericton.
- Novák P., Vaníček P., Martínez Z., Veronneau M., 2001: The effect of distant terrain on gravity and the geoid. *Journal of Geodesy* (en impresión).
- Novák P., Vaníček P., Veronneau M., Featherstone W.E., Holmes S.A., 2001: On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination: A comparison of two numerical techniques. *Journal of Geodesy* 74, págs. 644 a 654.
- Sjöberg L.E., 1996: On the error of analytical continuation in physical geodesy, *Journal of Geodesy* 70, págs. 724 a 730.
- Stokes G.G., 1849: On the variation of gravity at the surface of the earth, *Trans. Cambridge Philos. Soc. VII*, págs. 672 a 695.
- Sun W., Vaníček P., 1996: On the discrete problem of downward Helmert's gravity continuation. Proceedings of Session G7 (Techniques for local geoid determination), Annual meeting of European Geophysical Society, The Hague, mayo 6 a 10, 1996, *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, 96:2, págs. 29 a 34.
- Sun W., Vaníček P., 1998: On some problems of the downward continuation of $5' \times 5'$ mean Helmert's gravity disturbance. *Journal of Geodesy*, 72-7-8, págs. 411 a 420.
- Tenzer, R., y J. Jának, 2002. Stokes-Helmert's scheme for precise geoid determination. *Revista Cartográfica del IPGH*, No. 74-75. México, 2002.
- Torge, W., 2001. *Geodesy. Libro de texto*, tercera edición, Walter de Gruyter, Alemania. ISBN 3-11-017078-8.
- Vaníček P., Krakiwsky E.J., 1986: *Geodesy: the Concepts*. 2nd. rev. ed., North-Holland, Amsterdam.
- Vaníček P., Kleusberg A., 1987: The Canadian geoid-Stokesian approach, *Manuscripta Geodaetica* 12, págs. 86 a 98.

- Vaníček P., Sjöberg L.E., 1991: Reformulation of Stokes's theory for higher than second degree reference field and modification of integration kernels, *JGR* 96 (B4), págs. 6529 a 6539.
- Vaníček P., Martinec Z., 1994: Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid, *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 119 a 128.
- Vaníček P., Najafi M., Martinec Z., Harrie L., Sjöberg L.E., 1996: Higher-order reference field in the generalized Stokes-Helmert scheme for geoid computation. *Journal of Geodesy*, 70 (3), págs. 176 a 182.
- Vaníček P., Sun W., Ong P., Martinec Z., Najafi M., Vajda P., B ter Horst, 1996: Downward continuation of Helmert's gravity, *Journal of Geodesy*.
- Vaníček P., Featherstone W.E., 1998: Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid, *Journal of Geodesy*, 72, 12, págs. 684 a 697.
- Vaníček P., Huang J., Novák P., Veronneau M., Pagiatakis S., Martinec Z., Featherstone W.E., 1999: Determination of boundary values for the Stokes-Helmert problem. *Journal of Geodesy* 73, págs. 180 a 192.
- Vaníček P., Novák P., 1999: Comparison between planar and spherical models of topography. *CGU Annual Meeting, Banff, mayo 9 a 13 de 1999*.
- Vaníček P., Janak J., 2000: The UNB technique for precise geoid determination, *CGU meeting, Banff, mayo 24 a 26*.
- Wichiencharoen C., 1982: The indirect effect on the computation of geoid undulations. Dept. of Geodetic Science, Rep. 336, Ohio State University.